Erwartungswert

Aufgaben

Aufgabe 1
Bei der Flugplatz Party haben Sie die Wahl ob Sie 3 Euro Eintritt bezahlen, oder Sie würfeln den Eintrittspreis mit einem normalen Würfel.
Die Frage die sich dabei stellt ist, wie groß ist der Erwartungswert eines sechsseitigen fairen Würfels ?

Aufgabe 2
Thorsten ist ein begeisterter Fantasy-Abenteuer Spieler. Bei diesen Spielen werden auch Würfel benützt, aber diese unterscheiden sich deutlich von normalen Würfeln.

a. W_7 ist ein siebenseitiger Würfel, wobei die Augenzahlen aus der 1 und den ersten sechs Primzahlen bestehen

b. W_{12} ist ein zwölf seitiger Würfel, wobei die Augenzahlen die ersten zwölf ungeraden Zahlen sind

c. W_6 ist ein sechsseitiger Würfel, der $\{2, 4, 4, 6, 6, 6\}$ als Augenzahlen hat

Berechnen Sie die jeweiligen Erwartungswerte.

Aufgabe 3
Was ist der Erwartungswert der größten gezogenen Zahl M beim Zahlenlotto 6 aus 49 (ohne Zusatzzahl)?

Aufgabe 4
Sie würfeln zweimal und erhalten als Augenzahlen X_1 und X_2.
X sei das Maximum und Y das Minimum der beiden Würfe.
Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$ ohne die Verteilung von Y zu bestimmen.

Aufgabe 5
Um die allgemeine Popularität der Administratoren unter den Nutzern auszunutzen und nebenbei auch noch Geld in die klammen Kassen zu spülen entschließt sich die Universität dazu Päckchen zu verkaufen. Jedes dieser Päckchen enthält jeweils eine der acht verschieden All-Time-Best-Ever Poolmgr als Plastikfigur. Einen anderen Grund die Päckchen zu kaufen gibt und braucht es auch nicht. Da keiner der Nutzer jemals wieder ein glückliches Leben führen kann wenn er nicht alle acht Figuren besitzt und niemand Figuren tauscht, stellt sich die Frage wie viele Packungen müssen Sie im Schnitt kaufen, bis Sie einen kompletten Satz von acht verschieden Figuren gesammelt haben? Die verschiedenen Figuren sind mit gleicher Häufigkeit in den Packungen vertreten.

Hinweis: Betrachten Sie $Y_i := X_i - X_{i-1}$, wobei X_i die Zahl der gekauften Packungen sei, bis Sie i verschiedene Figuren beisammen haben. Warum ist Y_i geometrisch verteilt?

Aufgabe 6
Sie würfeln zweimal und erhalten als Augenzahl X_1 und X_2. Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X_1 und $S := X_1 + X_2$.

Aufgabe 7
Sie werfen eine faire Münze fünfzigmal. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses ab, weniger als zwanzigmal oder mehr als dreißigmal "Kopf" zu werfen! Wie groß ist der exakte Wert für diese Wahrscheinlichkeit ?

Aufgabe 8
X, Y seien die Augenzahlen zweier Würfelwürfe. Zeigen Sie, daß U := X + Y und V := X - Y nicht unabhängig sind. Betrachten Sie dazu konkrete Ereignisse, z.B. U = 12. Bestimmen Sie ferner die Kovarianz Kov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) von U und V.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
P ist gleichverteilt auf Ω, d.h. jede Ziffer hat dieselbe Wahrscheinlichkeit hier $\frac{1}{6}$.
$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6}$
$E[X] = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$
$E[X] = \frac{1}{6} \cdot (21) = \frac{21}{6} = 3.5$

Der Erwartungswert des Würfels beträgt 3.5 . Sie sollten also die 3 Euro bezahlen

Lösung zu Aufgabe 2

a.
$\Omega_{W_7} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
P ist gleichverteilt auf Ω, d.h. jede Ziffer hat dieselbe Wahrscheinlichkeit hier $\frac{1}{7}$.
$E[X] = \sum_{i=1}^{7} i \cdot \frac{1}{7}$
$E[X] = \frac{1}{7} \cdot (1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13)$
$E[X] = \frac{1}{7} \cdot (42) = \frac{42}{7} = 6$

Der Erwartungswert des Würfels beträgt 6.

b.
$\Omega_{W_{12}} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$
P ist gleichverteilt auf Ω, d.h. jede Ziffer hat dieselbe Wahrscheinlichkeit hier $\frac{1}{12}$.
$E[X] = \sum_{i=1}^{12} i \cdot \frac{1}{12}$
$E[X] = \frac{1}{12} \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23)$
$E[X] = \frac{1}{12} \cdot (144) = \frac{144}{12} = 12$

Der Erwartungswert des Würfels beträgt 12.

c.
$\Omega_{W_6} = \{2, 4, 4, 6, 6, 6\}$
P ist gleichverteilt auf Ω, d.h. jede Ziffer hat dieselbe Wahrscheinlichkeit hier $\frac{1}{6}$.
$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6}$
$E[X] = \frac{1}{6} \cdot (2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6)$
$E[X] = \frac{1}{6} \cdot (28) = \frac{28}{6} = 4\frac{2}{3}$

Der Erwartungswert des Würfels beträgt $4\frac{2}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 3
$X = \{6, ..., 49\}$
$P_X[k] = 1 \cdot \binom{k-1}{5} \cdot \frac{1}{\binom{49}{6}}$
$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i]$

$= \sum_{i=6}^{49} i \cdot \binom{i-1}{5} \cdot \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=6}^{49} i \binom{i-1}{5}$
$= \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=5}^{49} (i+1) \cdot \binom{i}{5} = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=5}^{49} (i+1) \cdot \frac{i!}{5!(i-5)!}$
$= \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=5}^{49} \frac{(i+1)!}{5!(i-5)!} = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=5}^{48} 6 \cdot \frac{(i+1)!}{6!((i+1)-6)!}$
$= \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=5}^{48} 6 \cdot \binom{i+1}{6} = \frac{1 \cdot 6}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=6}^{49} \binom{i}{6} = \frac{6}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=7}^{49} \binom{i}{6} \approx 42.86$

Lösung zu Aufgabe 4
$X(\omega) := \max(i, j)$
$Y(\omega) := \min(i, j)$
$(\omega = (i, j))$ mit $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, ..., 6\}\}$
Aus Symmetriegründe $p(\omega) := \frac{1}{36}(\omega \in \Omega)$ definiert.
$P(X = 1) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$
$P(X = 2) = P(\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) = \frac{3}{36}$
$P(X = 3) = P(\{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}) = \frac{5}{36}$
$P(X = 4) = \frac{7}{36}$
$P(X = 5) = \frac{9}{36}$
$P(X = 6) = \frac{11}{36}$
$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4\frac{17}{36}$
Aus X + Y = $X_1 + X_2$ und $E(X_1) = E(X_2) = 3.5$
sowie $E(X) = 4\frac{17}{36}$ folgt
$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) - E(X)$
$E(Y) = 3.5 + 3.5 - 4\frac{17}{36} = 2\frac{19}{36}$
Lösung zu Aufgabe 5
Anzahl der Figuren 8 n = 8
Anzahl der bereits erhalten Figuren i - 1
p_i die Wahrscheinlichkeit, daß in der nächsten Packung die i-te Figur enthalten ist.
$p_1 = 1 \quad p_2 = \frac{7}{8} \quad p_3 = \frac{6}{8} \quad p_4 = \frac{5}{8} \quad p_5 = \frac{4}{8} \quad p_6 = \frac{3}{8} \quad p_7 = \frac{2}{8} \quad p_8 = \frac{1}{8}$

$p_i = \frac{9-i}{8}$

Sei Y_i die Anzahl an Packungen die man kaufen muss damit man die i-te Figur erhält.

$E[Y_i] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_i q_i^{k-1} = \frac{p_i}{q_i} \sum_{k=1}^{\infty} k q_i^k = \frac{p_i q_i}{q_i(1-q_i)^2} = \frac{1}{p_i}$

$E[X_k] = \sum_{i=1}^{k} E[Y_i]$

$E[X_8] = \sum_{i=1}^{8} \frac{8}{9-i} \approx 21.74$

Man muss 22 Packungen kaufen.

Lösung zu Aufgabe 6

Sie würfeln zweimal und erhalten als Augenzahlen X_1 und X_2.
Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X_1 und $S := X_1 + X_2$

a)

Kovarianz $C(X_1, X_2)$

C$(X_1, X_1 + X_2) = C(X_1, X_1) + C(X_1, X_2)$

C$(X_1, X_1 + X_2) = V(X_1) + 0 = \frac{35}{12}$

b)

Korrelationskoeffizienten $r(X,Y) := \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$

Mit a) und $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2V(X_1)$
folgt $r(X_1, X_1 + X_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösung zu Aufgabe 7
Kopf := 1 , Zahl := 0

$\Omega := \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_{50}) \in \{0,1\}^{50}\} \Rightarrow \mid \Omega \mid = 2^{50}$

Sei
$A := \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{50} \omega_i < 20\}$
$B := \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{50} \omega_i > 30\}$

Sei $X : \Omega \rightarrow$ Zufallsvariable, gegeben durch $X(\omega) = \sum_{i=1}^{50} \omega_i, X(\Omega) = \mathbb{N}_0^{50}$

Exakter Wert
$P[X \leq 19] = P(A)$

$= \sum_{i=0}^{19} \binom{50}{i} \cdot 0.5^i \cdot 0.5^{50-i}$

$= \sum_{i=0}^{19} \binom{50}{i} \cdot 0.5^{50}$

$= 0.5^{50} \cdot \sum_{i=0}^{19} \binom{50}{i} = 0.05946$

$P[X \geq 31] = P(B)$

$= \sum_{k=31}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0.5^{50}$

$= 0.5^{50} \sum_{k=31}^{50} \binom{50}{k} = 0.05946$

P(A) + P(B) = 0.11892

Mit Tschebyschev Ungleichung
Für jede Zufallsvariable $x \in \mathcal{L}^2(\Omega, a, \mathcal{P})$ gilt: $P[\mid X - E[X] \mid \geq \epsilon] \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$
Gesucht :
$1 - P(19 \leq X \leq 31)$
$E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0.5 = 25$
$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
$E[X^2] = n \cdot p((n-1)p + 1)$
$E[X^2] = 50 \cdot 0.5((49) \cdot 0.5 + 1)$
$E[X^2] = 25(24.5 + 1) = 637.50$
$Var(X) = 637.50 - 25^2 = 12.50$
$P[\mid X - E[X] \mid \geq \epsilon] \leq \frac{12.5}{\epsilon^2}$
$P[\mid 19 - 25 \mid \geq \epsilon] \leq \frac{12.5}{\epsilon^2}$
$P[6 \geq \epsilon] \leq \frac{12.5}{\epsilon^2}$
Wähle $\epsilon = 6$
$P[X \leq 19] \leq \frac{12.5}{36} \approx 0.35$
$P[\mid 31 - 25 \mid \geq \epsilon] \leq \frac{12.5}{\epsilon^2}$
$P[6 \geq \epsilon] \leq \frac{12.5}{\epsilon^2}$
Wähle $\epsilon = 6$
$P[X \geq 31] \leq \frac{12.5}{36} \approx 0.35$

$1 - P(19 \leq X \leq 31) = 1 - 0.35 - 0.35 = 0.3$

Lösung zu Aufgabe 8

Für U =

	U		U		U		U		U		U
(1,1)	2	(1,2)	3	(1,3)	4	(1,4)	5	(1,5)	6	(1,6)	7
(2,1)	3	(2,2)	4	(2,3)	5	(2,4)	6	(2,5)	7	(2,6)	8
(3,1)	4	(3,2)	5	(3,3)	6	(3,4)	7	(3,5)	8	(3,6)	9
(4,1)	5	(4,2)	6	(4,3)	7	(4,4)	8	(4,5)	9	(4,6)	10
(5,1)	6	(5,2)	7	(5,3)	8	(5,4)	9	(5,5	10	(5,6)	11
(6,1)	7	(6,2)	8	(6,3)	9	(6,4)	10	(6,5)	11	(6,6)	12

Für V =

	V		V		V		V		V		V
(1,1)	0	(1,2)	-1	(1,3)	-2	(1,4)	-3	(1,5)	-4	(1,6)	-5
(2,1)	1	(2,2)	0	(2,3)	-1	(2,4)	-2	(2,5)	-3	(2,6)	-4
(3,1)	2	(3,2)	1	(3,3)	0	(3,4)	-1	(3,5)	-2	(3,6)	-3
(4,1)	3	(4,2)	2	(4,3)	1	(4,4)	0	(4,5)	-1	(4,6)	-2
(5,1)	4	(5,2)	3	(5,3)	2	(5,4)	1	(5,5)	0	(5,6)	-1
(6,1)	5	(6,2)	4	(6,3)	3	(6,4)	2	(6,5)	1	(6,6)	0

Für U = 12 gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$, bei U = 12 folgt das Y = 0 ist, die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{36} = P(X + Y = 12, X - Y = 0) \neq P(X + Y = 12) \cdot P(X - Y = 0) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$

Kov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V)
E(U) = E(X) + E(Y)
E(X) = E(Y) = 3.5
E(U) = 7
E(Y) = E(X) - E(Y) = 0
Kov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V)
Kov(U,V) = E(UV)
Kov(U,V) = $E((X + Y) \cdot (X - Y)) = E(X^2 - Y^2) = 0$
Alternativ:
Kov(X + Y, X - Y) = Kov(X,X) + C(Y,X) - C(X,Y) - C(Y,Y)
Kov(X + Y, X - Y) = V(X) - V(Y) = 0
X + Y und X - Y sind unkorreliert, aber nicht unabhängig.

Quelle: Stochastik
Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de